Grundbestandteile

- Potenz & Logarithmus Gesetze
- Qualitative Aspekte von Funktionen
- Folgen & Reihen

Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Bem: a^n heißt die "n-te Potenz" von a

Auch $a^{p/q}$ für $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$ macht Sinn mit dem Begriff der Wurzel:

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Bem: Ist $a \geq 0$. Dann ist $\sqrt[n]{a}$ die Bezeichnung für die eindeutige Lösung $x \geq 0$ der Gleichung $x^n = b$

Setze schließlich, $a^0 = 1$ und

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} \quad \text{für } a \neq 0,\ p,q \in \mathbb{N}$$

Potenzgesetze   Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Q}$, dann gilt

- $$a^m a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}}_{m+n\text{-mal}} = a^{m+n}$$

- $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{\ldots} \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{\ldots} \cdot a} = a^{m-n}$$

- $$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\text{ mal}} = a^{m \cdot n}$$

Bsp:
$$\frac{a^2}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a} = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

- $a^n b^n = (ab)^n$

Entsprechend gilt $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$

Bsp:
$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$
$= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
$= a^6 = a^{2 \cdot 3}$

Logarithmus-Gesetze

Für $u, v > 0$ und beliebige Basen gilt

- $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$
- $\log(u^\alpha) = \alpha \log(u)$
- $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$

Bem: Sind $a, b > 0$, $a \neq 1$, dann ist $\log_a(b)$ die Bezeichnung für die Lösung x der Gleichung
$a^x = b$

Entsprechend gilt

$$a^{\log_a(a)} = a^1 = a$$

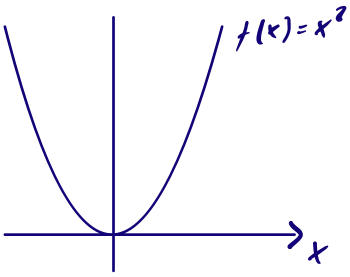
Qualitative Aspekte v. Funktionen

$f: \mathbb{D}_f \longrightarrow A$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{W}_f \subset A$

- Werte aus $\mathbb{D}_f$ (Definitionsbereich) in die Funktion eingesetzt machen Sinn.
  z.B. $f(x) = \log(x)$ macht für $x > 0$ Sinn nicht aber für $x = 0$ (siehe Bem. log)

- Für alle Werte y aus dem Wertebereich ($\mathbb{W}_f$) gibt es mindestens ein $x \in \mathbb{D}_f$ mit $f(x) = y$

z.B: $f(x) = x^2$, dann $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

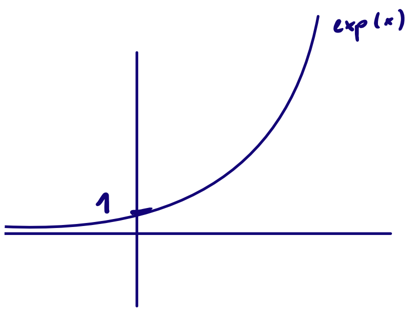


und $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Die negativen Zahlen sind nicht im Wertebereich weil $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$

Aufgabe in Klausur

Gegeben $f(x) = \exp(x) - 1$ und $g(x) = 4 - x^2$. Bestimmen Sie den Wertebereich von f und g.

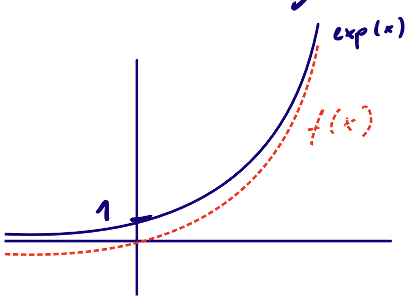
Zu $\mathbb{W}_f$: Wir (sollen) wissen:



$\mathbb{W}_h = \mathbb{R}_{>0}$

für $h(x) = \exp(x)$

Für f folgt aus $\mathbb{W}_h = \mathbb{R}_{>0}$: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_{>-1}$



$f(x) = \exp(x) - 1 \iff \exp(x) = f(x) + 1$

|

Zu W_g: Wir (sollten) wissen: $W_h = \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $h(x) = x^2$. Dann folgt für $j(x) = -h(x)$

$W_j = \mathbb{R}_{\leq 0}$ und daher $W_g = \mathbb{R}_{\leq 4}$

Monotonie Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, dann

heißt f

- (streng) mon. wachsend, falls
  $$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2)$$
- (streng) mon. fallend, falls
  $$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \overset{(>)}{\geq} f(x_2)$$

Es gilt: Ist f auf D differenzierbar, dann ist

f monoton wachsend $\iff$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in D$

f monoton fallend $\iff$ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D$

f streng monoton wachsend $\Longleftarrow$ $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$

f streng monoton fallend $\Longleftarrow$ $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$

<u>Bem</u>: Die Aussagen

f streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$
f streng monoton fallend $\Rightarrow$ $f'(x) < 0$

gelten im Allgemeinen nicht! Betrachte z.B. $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$: Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt $x_1^3 < x_2^3$, aber $f'(x) = 3x^2$ und $f'(x) = 0 \iff x = 0$

<u>Aufgabe in Klausur</u> Gegeben $f(x) = \exp(x) - 1$ & $g(x) = 4 - x^2$. Bestimmen Sie die Monotonie von $f \circ g$ und untersuchen Sie $f \circ g$ für $x \to \infty$.

Es ist:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \exp(g(x)) - 1 = \exp(4 - x^2) - 1$$

Für Monotonie benutze Ableitung. Es gilt:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$f(x) = \exp(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = \exp(x)$$

$$g(x) = 4 - x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(g(x)) = \exp(4 - x^2)(-2x)$$

Betr. nun gemäß Monotonie die Vorzeichen der Abl..

Überlegung $\underbrace{\exp(4-x^2)}_{\text{ist } >0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}}\underbrace{(-2x)}_{\substack{>0,\ x<0\\ <0,\ x>0\\ =0,\ x=0}}$

Es gilt $\frac{d}{dx} f_g(x) = 0 \iff x = 0$

$\frac{d}{dx} f_g(x) > 0 \iff x < 0$

$\frac{d}{dx} f_g(x) < 0 \iff x > 0$

denn $\exp(4-x^2) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $-2x \gtrless 0$ für $x \lessgtr 0$. Also folgt f_g ist

streng mon. wachsend auf $\mathbb{R}_{<0}$

streng mon. fallend auf $\mathbb{R}_{>0}$

Für $f_g(x)$ für $x \to \infty$ betrachte

$$f_g(x) = \exp(\underbrace{4-x^2}_{\longrightarrow -\infty \text{ für } x\to\infty}) - 1$$

& $\exp(y) \longrightarrow 0$ für $y \to -\infty$

also $f_g(x) \longrightarrow -1$ für $x \to \infty$

Konvexität / Konkavität

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, dann heißt f

- (strikt) konkav auf D, falls

$$f(\lambda x_1 + (\lambda - 1) x_2) \overset{(>)}{\geq} \lambda f(x_1) + (\lambda - 1) f(x_2)$$

- (strikt) konvex auf D, falls

$$f(\lambda x_1 + (\lambda - 1) x_2) \overset{(<)}{\leq} \lambda f(x_1) + (\lambda - 1) f(x_2)$$

Es gilt: Ist f auf D 2 Mal differenzierbar, dann ist

f	konvex	$\Longleftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$	für alle $x \in D$
f	konkav	$\Longleftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$	für alle $x \in D$
f	strikt konvex	$\Longleftarrow$	$f''(x) > 0$	für alle $x \in D$
f	strikt konkav	$\Longleftarrow$	$f''(x) < 0$	für alle $x \in D$

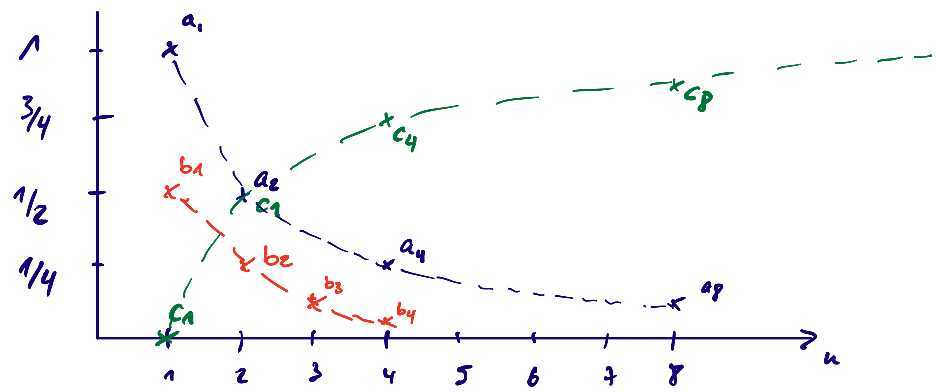
<u>Bem</u>: Aussagen über die (strikte) Konvexität bzw. (strikte) Konkavität einer Funktion sind Aussagen über die (strikte) Monotonie der (ersten) Ableitung der Funktion

Folgen & Reihen

zB $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$

$b_n := \frac{1}{2}^n$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

$c_n := 1 - \frac{1}{n}$



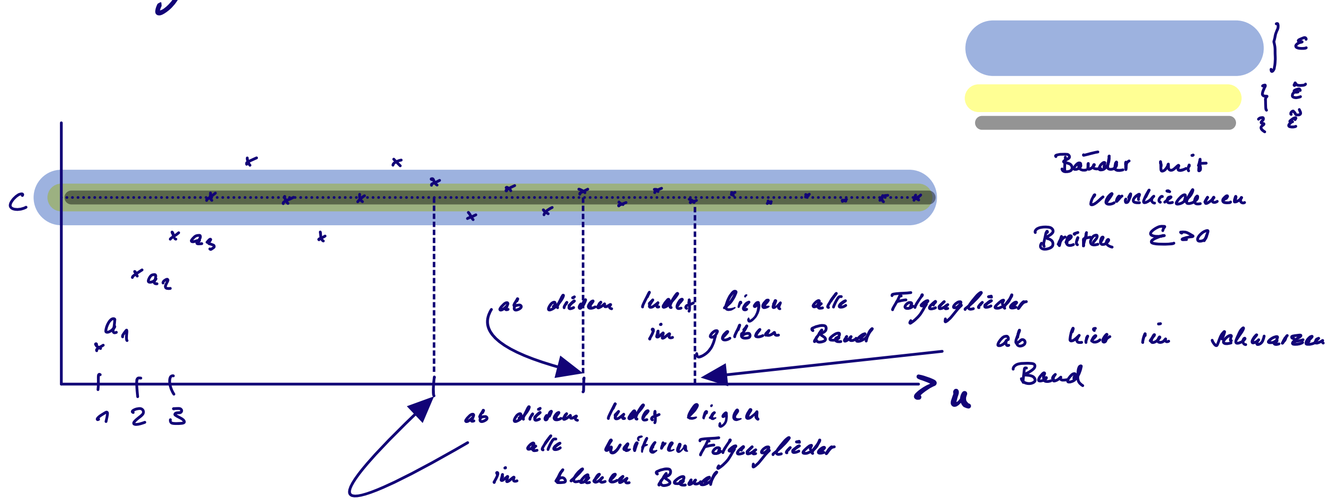
Konvergenz einer beliebigen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Wert $c \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ ex. ein Index $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$|a_n - c| < \varepsilon$ für $n \geq N_0$

gilt.



Konvergenz heißt: Für jedes Band einer Breite $\varepsilon > 0$ (d.h. auch für sehr dünne Bänder) findet sich ein Index N_0 ab dem alle Folgeglieder in dem Band liegen (also von dem Wert c weniger als ε abweichen ($|a_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$)) vgl. Skizze

Für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gilt für $c \in \mathbb{R}$:

- $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = ca$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

Reihen (Folgen von Partialsummen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge. $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ nennt man die n-te Partialsumme. Unter einer Reihe versteht man eine Folge von Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (falls dieser existiert) heißt Wert der Reihe und wird als

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_n$$

notiert.

Wichtige Reihen & Grenzwerte

- $\sum_{i=1}^{n} x^{i-1}$ geometrische Reihe
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ harmonische Reihe
- $\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ Exponentialreihe
- $\sum_{j=1}^{n} j$

Es gilt

- $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$.

  Gilt $|x| \geq 1$ so divergiert die Reihe
- Die harmonische Reihe divergiert
- $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ "Gaußsche Summenformel"

Aufgaben in Klausur

i) Bestimmen Sie den Grenzwert von

$$s_n = 2 + \sum_{i=2}^{n} (\exp(g))^{i-1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

für festes $g<0$. Für welchen Wert g hat $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert 4?

ii) Welcher Wert ergibt sich für

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

für $n \in \mathbb{N}$.

iii) Bestimmen Sie den Grenzwert $n \to \infty$ von

$$a_n = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{3^{j/2}}{j!} - 1$$

i) Es gilt

$$2 + \sum_{i=2}^{n} (\exp(g))^{i-1} = 2 + \exp(g) + \exp(g)^2 + \dots + \exp(g)^{n-1}$$

$$= 1 + 1 + \exp(g) + \exp(g)^2 + \dots + \exp(g)^{n-1}$$

$$= 1 + \exp(g)^0 + \exp(g) + \exp(g)^2 + \dots + \exp(g)^{n-1}$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\exp(g))^{i-1}}_{\text{geometrische Reihe mit } x = \exp(g)}$$

Die geometrische Reihe konvergiert, wenn $|x| < 1$, also $|\exp(g)| < 1$ gilt. Da $g < 0$ nach Vor. & $\exp(g)$ somit strikt kleiner als 1 und strikt größer als 0 ist gilt $|\exp(g)| = \exp(g) < 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\exp(g))^{i-1} = \sum_{j=1}^{n} x^{i-1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - \exp(g)}$$

Also gilt insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} 2+\sum_{i=2}^{n}(\exp(g))^{i-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1+\sum_{i=1}^{n}(\exp(g))^{i-1}$$

$$= 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\exp(g))^{i-1}$$

$$= 1+\frac{1}{1-\exp(g)}$$

Der GW von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beträgt 4 wenn $g<0$ so gewählt wird, dass

$$4 = 1+\frac{1}{1-\exp(g)}$$

gilt. Es ist

$$4 = 1+\frac{1}{1-\exp(g)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3 = \frac{1}{1-\exp(g)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-\exp(g) = \frac{1}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} = \exp(g)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2}{3}\right) = g$$

Für $g = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ gilt $\lim_{n\to\infty} 2+\sum_{i=2}^{n}(\exp(g))^{i-1} = 4$

ii) Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i$ hat n Summanden &

$$\sum_{i=1}^{n} i = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{} \ldots \boxed{} + \boxed{n-2} + \boxed{n-1} + \boxed{n}$$

$+ \; = n+1$

$+ \; = n+1$

$+ \; = n+1$

$$= n+1 + \sum_{i=2}^{n-1} i$$

$$= n+1 + n+1 + \sum_{i=3}^{n-2} i$$

$$= n+1 + n+1 + n+1 + \sum_{i=4}^{n-3} i$$

$$\vdots$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

Falls n eine gerade Zahl ist, liefert dieses Vorgehen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}$$

Anzahl der Terme $(n+1)$: $\frac{n}{2}$

Also $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

für n gerade

Ist n ungerade dann ist $n = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{2m+1} i = \sum_{i=1}^{2m} i + (2m+1)$$

Da $2m$ eine gerade Zahl ist, gilt wieder

$$\sum_{i=1}^{2m} i = \frac{2m}{2}(2m+1)$$

Also
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{2m} i + (2m+1) \\
&= \frac{2m}{2}(2m+1) + (2m+1) \\
&= \left(\frac{2m}{2} + 1\right)(2m+1) \\
&= \frac{2m+2}{2}\underbrace{(2m+1)}_{=n} \\
&= (\underbrace{2m+1}_{=n} + 1)\,\frac{\overbrace{2m+1}^{=n}}{2} = (n+1)\,\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

iii) $a_n = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{3^{j/2}}{j!} - 1$

Es gilt
$$2\sum_{j=1}^{n} \frac{3^{j/2}}{j!} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{3^{1/2\cdot j}}{j!} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{3}^{\,j}}{j!}$$
$$= 2\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\sqrt{3}^{\,j}}{j!} - 1\right)$$
$$= 2\boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{\sqrt{3}^{\,j}}{j!}} - 2$$

n-te Partialsumme der Exponentialreihe mit $x = \sqrt{3}$

Also
$$2\sum_{j=0}^{n} \frac{3^{j/2}}{j!} \longrightarrow 2\exp(\sqrt{3}) \quad \text{für } n \to \infty$$

und
$$a_n = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{3^{j/2}}{j!} - 1 = 2\sum_{j=0}^{n} \frac{\sqrt{3}^{\,j}}{j!} - 2 - 1$$
$$\longrightarrow 2\exp(\sqrt{3}) - 3 \quad \text{für } n \to \infty$$